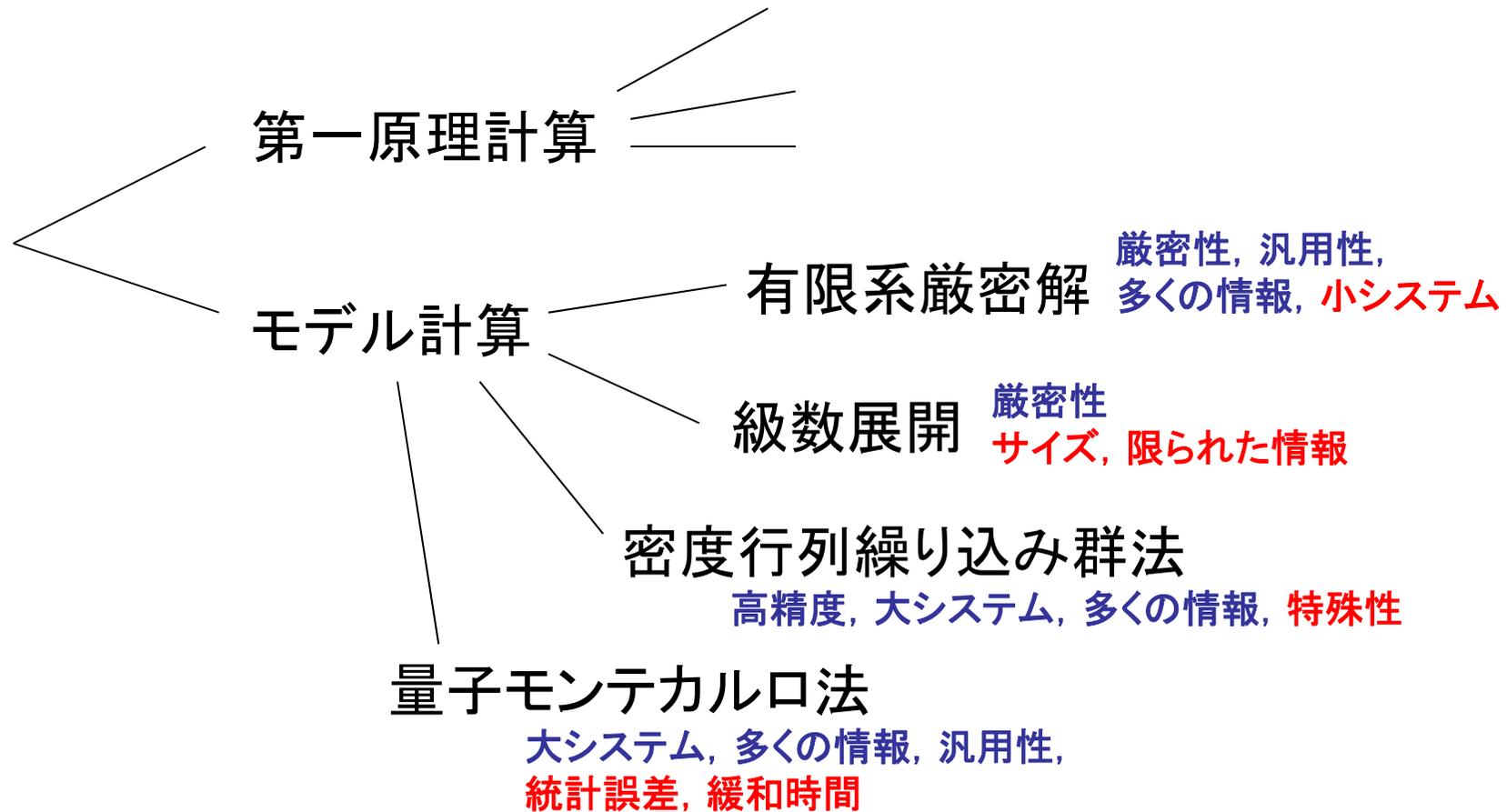


物性物理におけるモンテカルロ法

川島直輝(物性研)

物性若手夏の学校2007
紀三井寺 2007年8月7-9日

いろいろな計算手法



量子モンテカルロ法の「守備範囲」

量子モンテカルロ法の特徴：

長所： 大システムの計算可能, 多くの情報, 汎用性

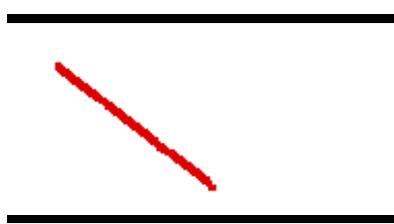
短所： 統計誤差, 緩和時間

臨界現象や相転移現象の研究に向いている

量子スピン系(さまざまな磁性体)の低温相,
ボーズ系の凝縮(超流動固体, 極低温原子系, 光格子),
強相関電子系(高温超伝導, ハバードモデルなど)
Lattice QCD,

単純なモンテカルロ法

Buffon の針



でたらめに落とした長さ1の針が間隔1で引かれた平行線のどちらかと交わる確率は $2/\pi$.

$$\pi = \frac{2 \times (\text{針を落とした回数})}{(\text{針が線と交わった回数})}$$

モンテカルロ法 = 決定論的な問題を乱数を利用して解く方法
(「モンテカルロシミュレーション」とはいえない)

3408 回の試行により $\pi=3.1415929$ (Lazzerini 1901)

単純なモンテカルロ法 (棄却法)

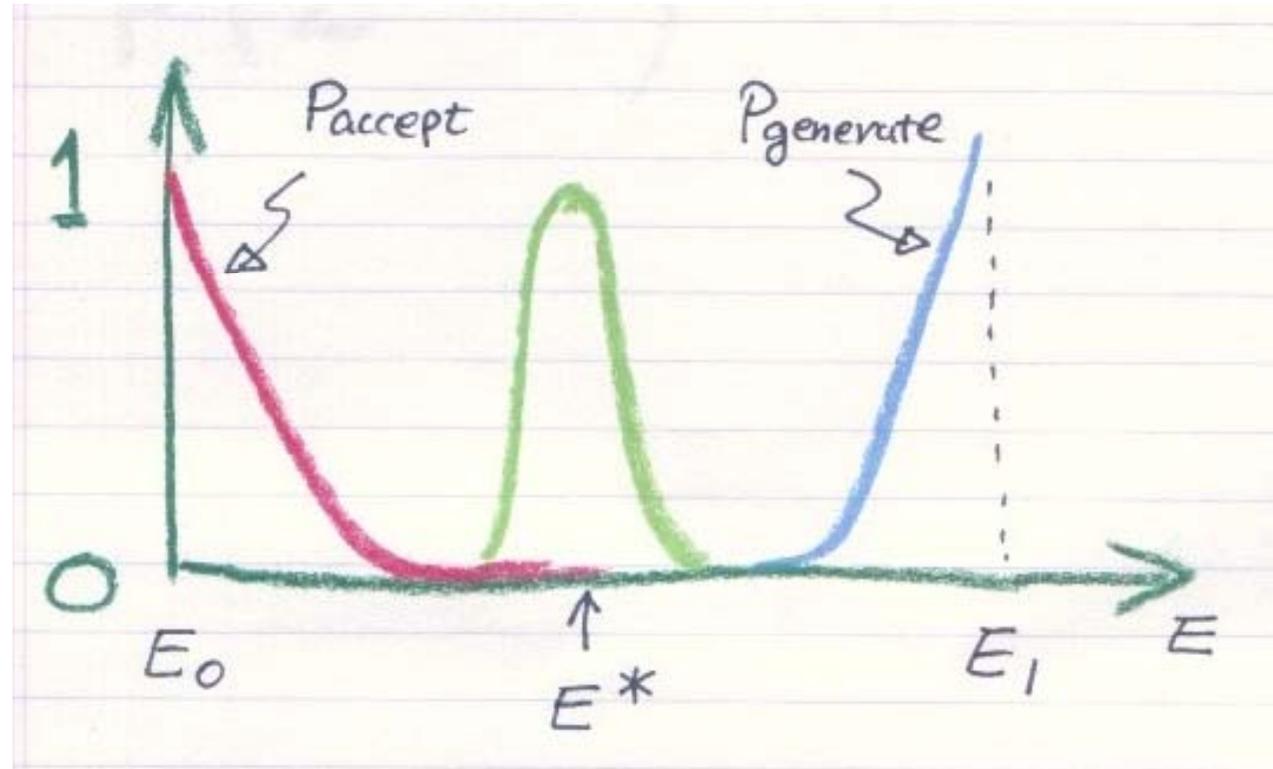
単純モンテカルロ法：

ステップ 1： (乱数を用いて何らかの方法で) Ω の中から 1 つの要素を選ぶ.
その際全ての状態は同じ確率で選ばれるようにする. (選ばれた状態を Σ とする.)

ステップ 2： 0 以上 1 未満の一様乱数を発生し, それが $P_{\text{accept}} = W(\Sigma)/W_{\text{max}}$ 未満なら 1 で選んだ状態を採用する. 逆に乱数が P_{accept} 以上なら棄却する.

ステップ 3： 1 に戻る.

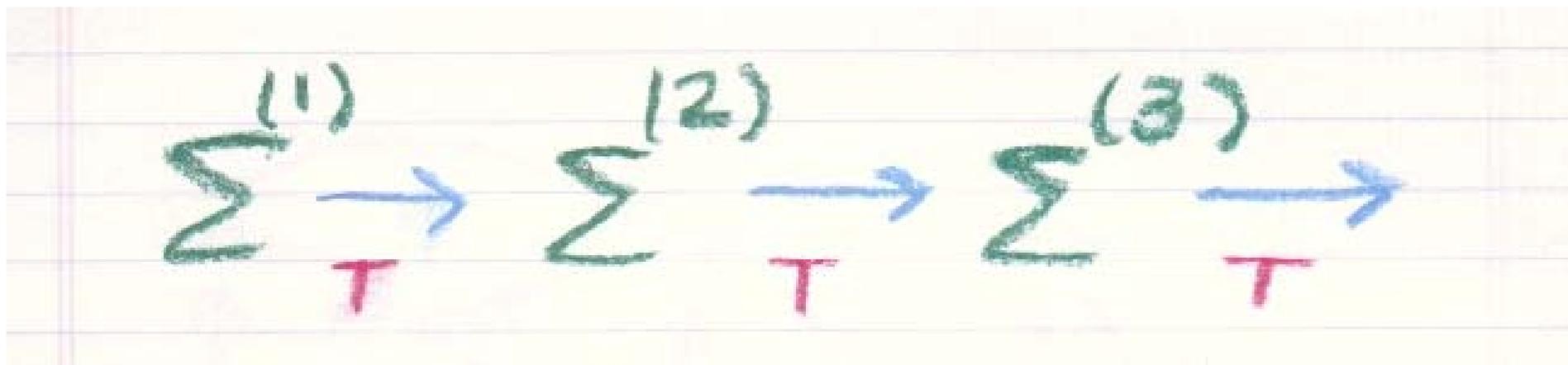
棄却法の限界



$$P_{\text{accept}} \equiv e^{-\beta E^*} / e^{-\beta E_0} = e^{-\beta(E^* - E_0)}$$

$$P_{\text{generate}} = e^{S(E^*)} / \sum_E e^{S(E)} < e^{-(S(E_1) - S(E^*))}$$

マルコフ過程を使った モンテカルロ法



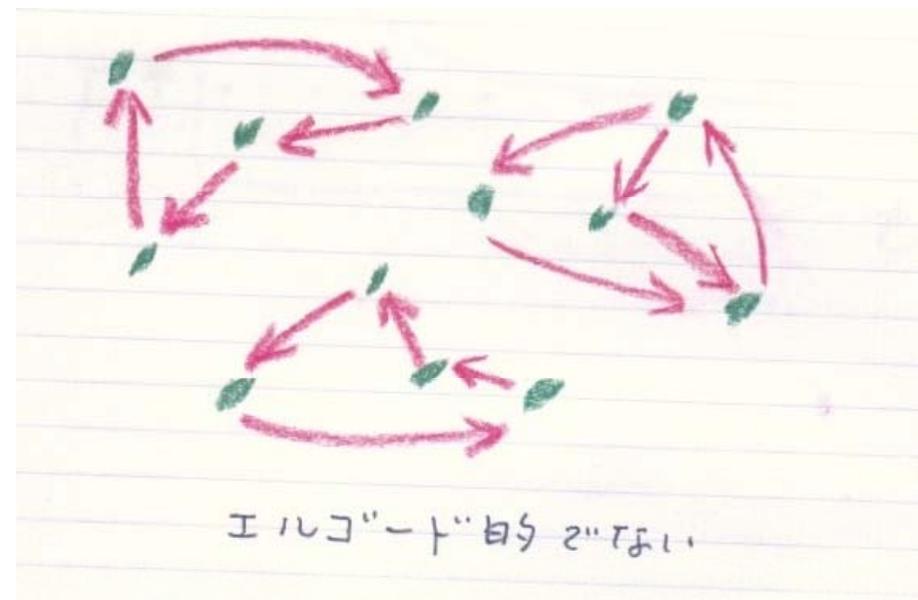
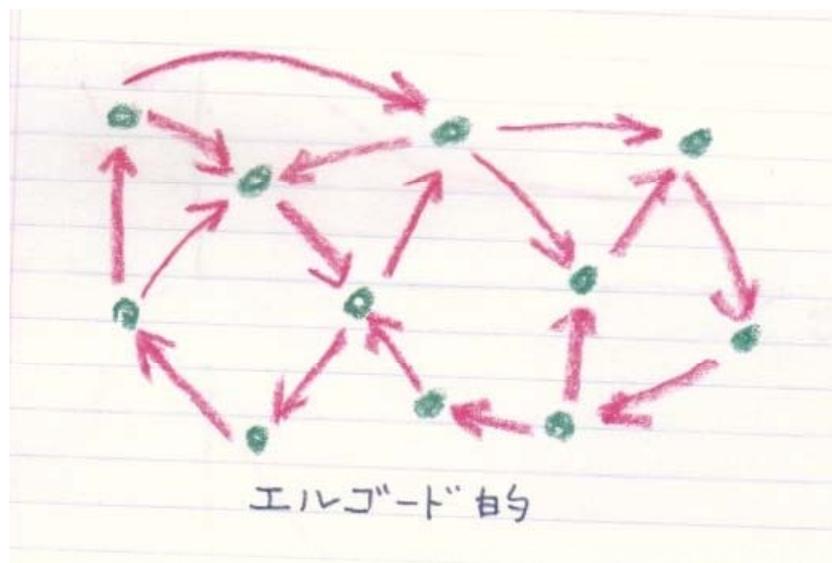
$$P^{(t)} = TP^{(t-1)}$$

$$P^{(t)}(\Sigma) = \sum_{\Sigma'} T(\Sigma|\Sigma')P^{(t-1)}(\Sigma')$$

詳細つりあい

$$T(\Sigma|\Sigma')W(\Sigma') = T(\Sigma'|\Sigma)W(\Sigma)$$

エルゴード性



$$\forall(\Sigma, \Sigma') \left(\exists t \left(T^t(\Sigma'|\Sigma) > 0 \right) \right)$$

イジングモデルの モンテカルロシミュレーション

シングルスピナップデート法：

ステップ0：適当に初期状態のスピ配置（たとえばランダムな状態）を用意する。

ステップ1：一様ランダムに1つスピを選ぶ。（以下それを S_0 と呼ぶ）

ステップ2： S_0 以外の全てのスピは現在の状態のままにしておいて、 S_0 が上向きである状態 (Σ_{\uparrow}) のエネルギー E_{\uparrow} と下向きに向きである状態 (Σ_{\downarrow}) のエネルギー E_{\downarrow} の差 $\Delta E \equiv E_{\uparrow} - E_{\downarrow}$ を求める。

ステップ3：0以上1未満の乱数 r を1つ発生して、それが

$$P_{\uparrow} \equiv \frac{1}{1 + e^{\beta \Delta E}}$$

未満であれば、現在の状態を Σ_{\uparrow} に置き換える。 $r \geq P_{\uparrow}$ であれば、 Σ_{\downarrow} に置き換える。

ステップ4：ステップ1に戻る。以下繰り返し。

モンテカルロシミュレーションの収束

行列 T_{ij} について

$$T_{ij} \geq 0 \quad (10)$$

$$\sum_i T_{ij} = 1 \quad (11)$$

$$\exists t (\forall s > t (\forall (i, j) ((T^s)_{ij} > 0))) \quad (12)$$

$$T_{ij} W_j = T_{ji} W_i \quad (13)$$

が成り立ち、ベクトル $P^{(0)}$ が

$$P_i^{(0)} \geq 0 \quad (14)$$

$$\sum_i P_i^{(0)} = 1 \quad (15)$$

であるとき、 $P^{(t)} \equiv T^t P^{(0)}$ に対して

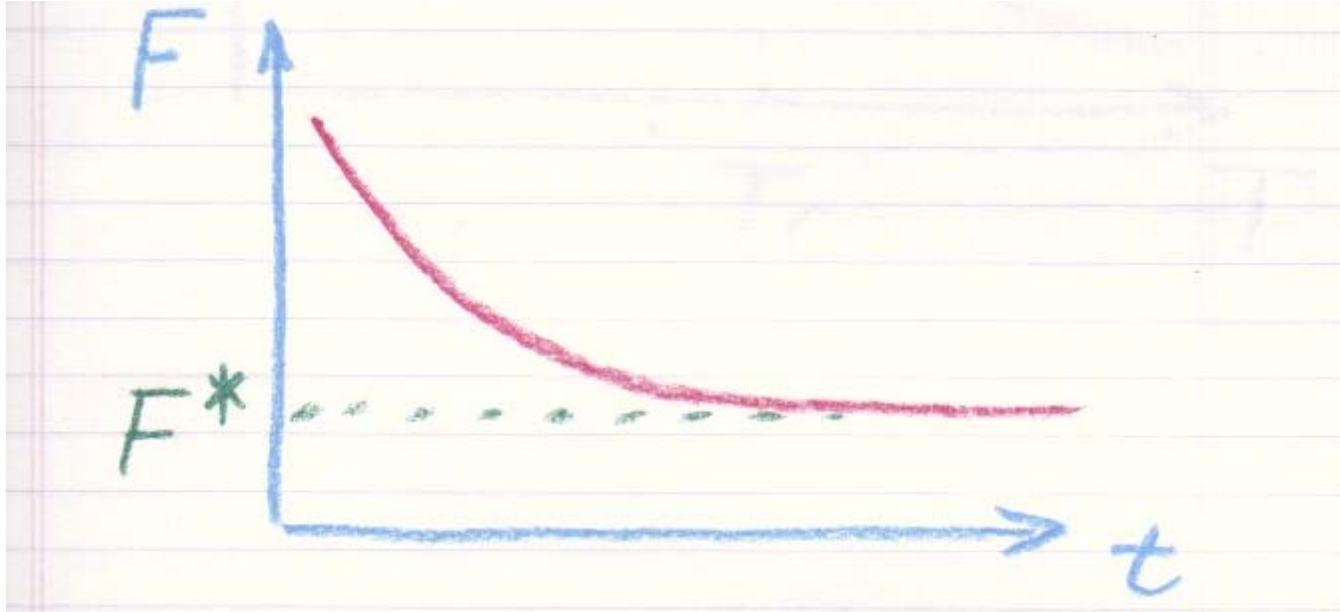
$$\lim_{t \rightarrow \infty} P^{(t)} = P^*$$

が存在して、

$$P^* \parallel W$$

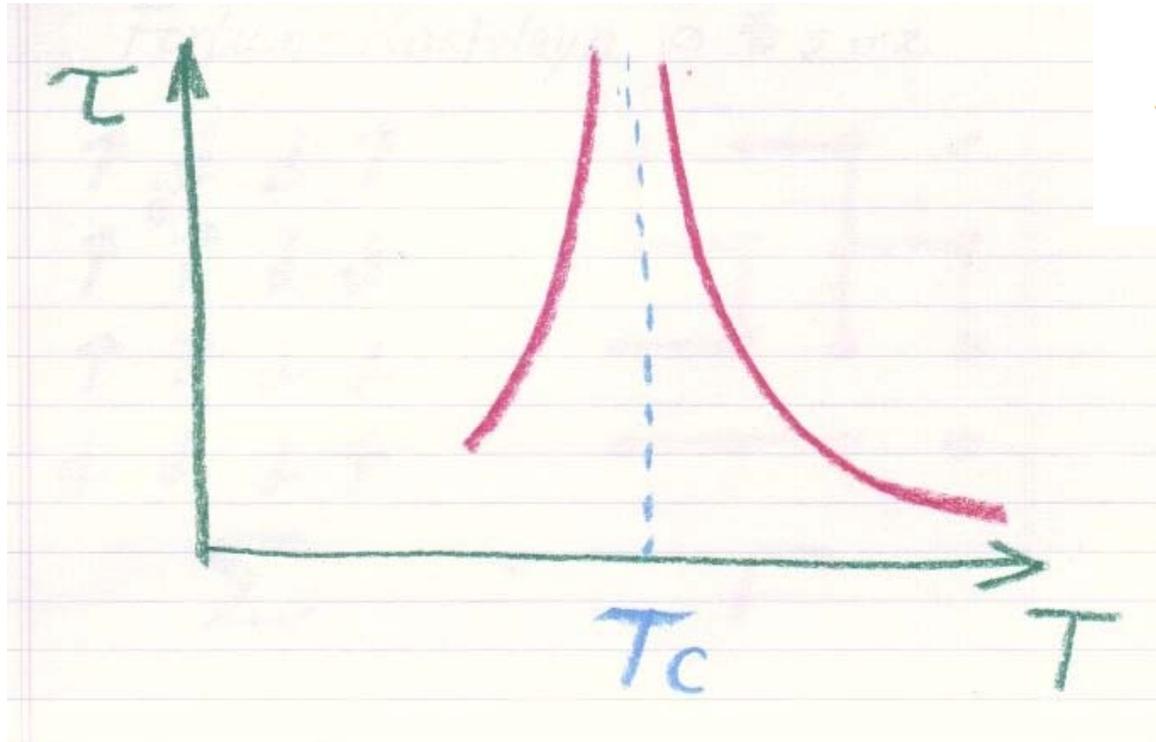
である。

自由エネルギーは単調減少



$$-F \equiv T \sum_i W_i f \left(\frac{P_i}{W_i} \right)$$

緩和時間



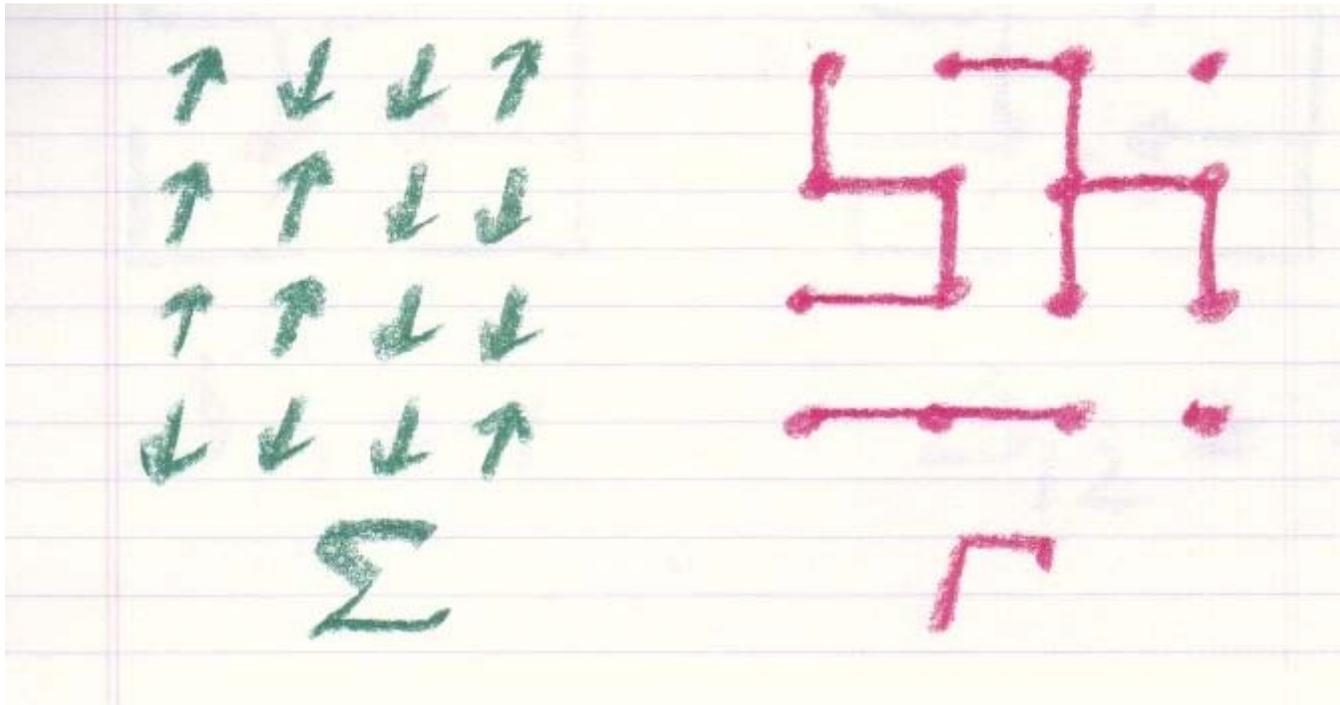
$$\tau < \frac{1}{2T_{\min}}$$

$$\tau \propto \xi^z \propto (T - T_c)^{-z\nu}$$

$$z \approx 2$$

Fortuin-Kasteleyn の書き換え

$$Z \equiv \sum_{\Sigma} W(\Sigma) = \sum_{\Sigma} \sum_{\Gamma} W(\Sigma, \Gamma)$$



Swendsen-Wang アルゴリズム

Swendsen-Wang アルゴリズム :

ステップ0 : 適当に初期状態のスピン配置 (たとえばランダムな状態) を用意する.

ステップ1 : 各最近接スピン対ごとに2つのスピンをつなぐ線を描くかどうかを決める. すなわち, もし2つのスピンが同じ向きを向いているばあい, 0以上1未満の一樣乱数を発生してそれが $1 - e^{-2K}$ 以下であれば線を描く. それ以外のときは, 描かない (すでに描いてあれば線を消す).

ステップ2 : ステップ1 でできたグラフの各クラスタごとに0以上1未満の乱数を発生して, それが $1/2$ 以下であればクラスタに属するすべてのスピンを -1 とし, そうでなければ $+1$ にする.

ステップ3 : 1に戻る.

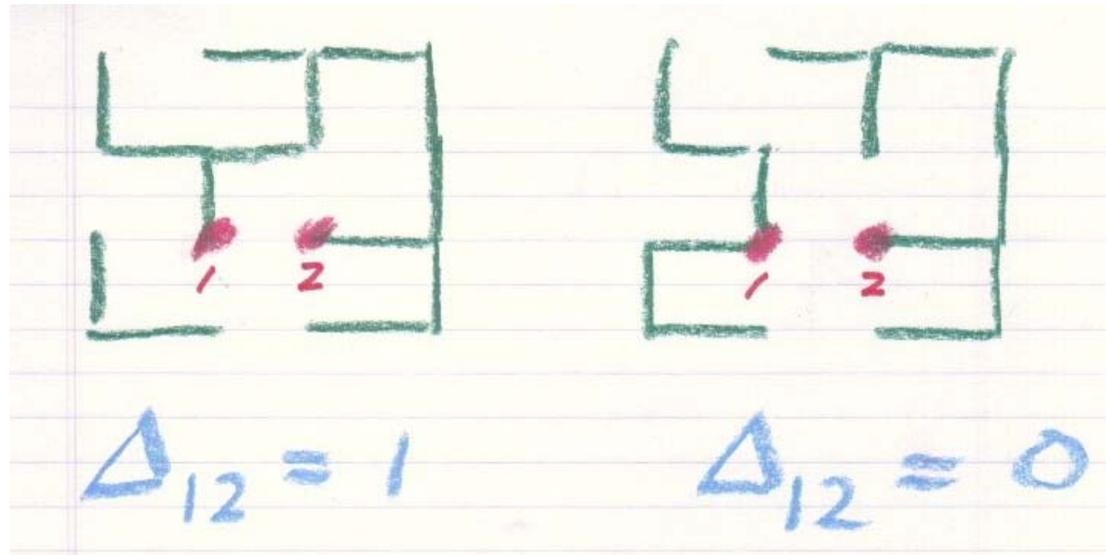
遷移行列

$$T_1(\Gamma | \Sigma) = \frac{W(\Sigma, \Gamma)}{W(\Sigma)}$$

$$T_2(\Sigma | \Gamma) = \frac{W(\Sigma, \Gamma)}{W(\Gamma)}$$

2点相関関数

$$\langle S_i S_j \rangle = \langle \Delta_{ij}(\Gamma) \rangle$$



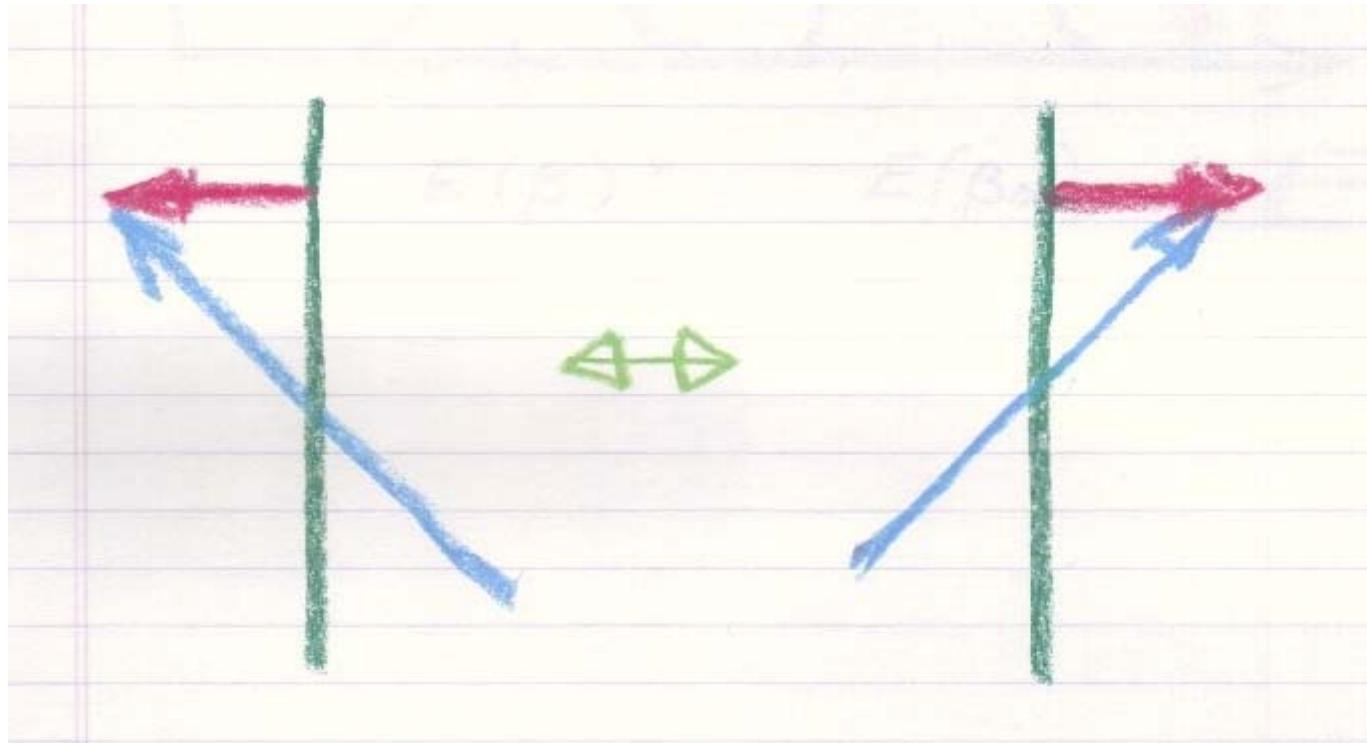
クラスタサイズと相関長がほぼ対応する.

クラスタアルゴリズムの収束

Swendsen-Wang アルゴリズムの場合の
証明は自由エネルギーの単調性を使ってできる。
(一般に, 全体としてエルゴード性があればOK.)

Wolff アルゴリズム(1)

離散的対称性を利用した連続スピンモデルの離散化



Wolff アルゴリズム (2)

シングルクラスタによる更新

ランダムに選んだスピンからスタートして
Swendsen-Wang のグラフ生成ルールを適用する。
最初に選んだスピンを含むクラスタ以外は手をつけない。

拡張アンサンブル法

もともとの重み W とは異なる重み W_0 について詳細釣り合いを満たすモンテカルロシミュレーションからもともとの重みに関する平均量を求める方法.

$$\langle Q \rangle = \frac{\left\langle \frac{W}{W_0} Q \right\rangle_0}{\left\langle \frac{W}{W_0} \right\rangle_0}$$

Q ... 任意の物理量

W ... 「正しい」重み

W_0 ... モンテカルロシミュレーションで使う重み

$\langle \rangle_0$... モンテカルロシミュレーションで得られる平均値

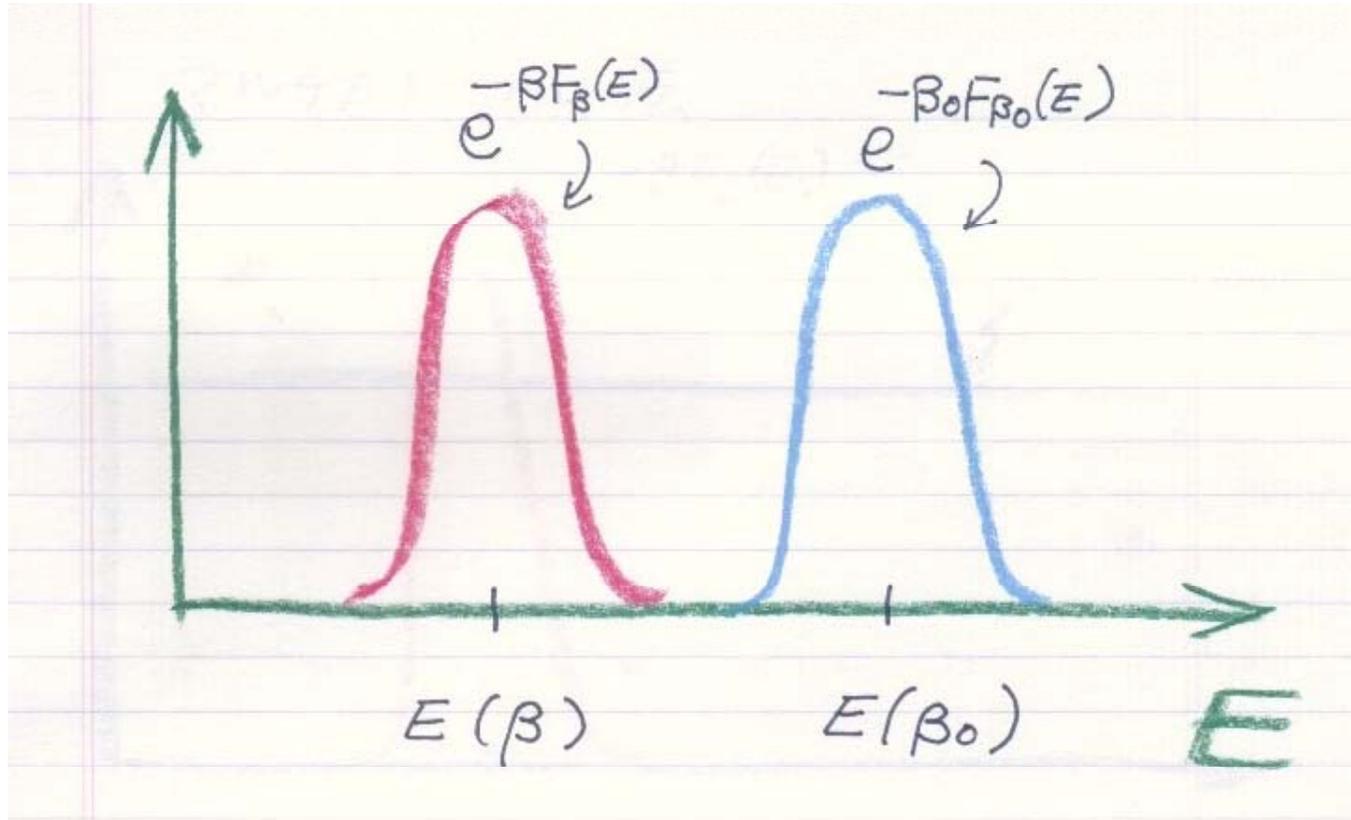
再重み付け法

$$W(\Sigma) = e^{-\beta E(\Sigma)}$$

$$W_0(\Sigma) = e^{-\beta_0 E(\Sigma)}$$

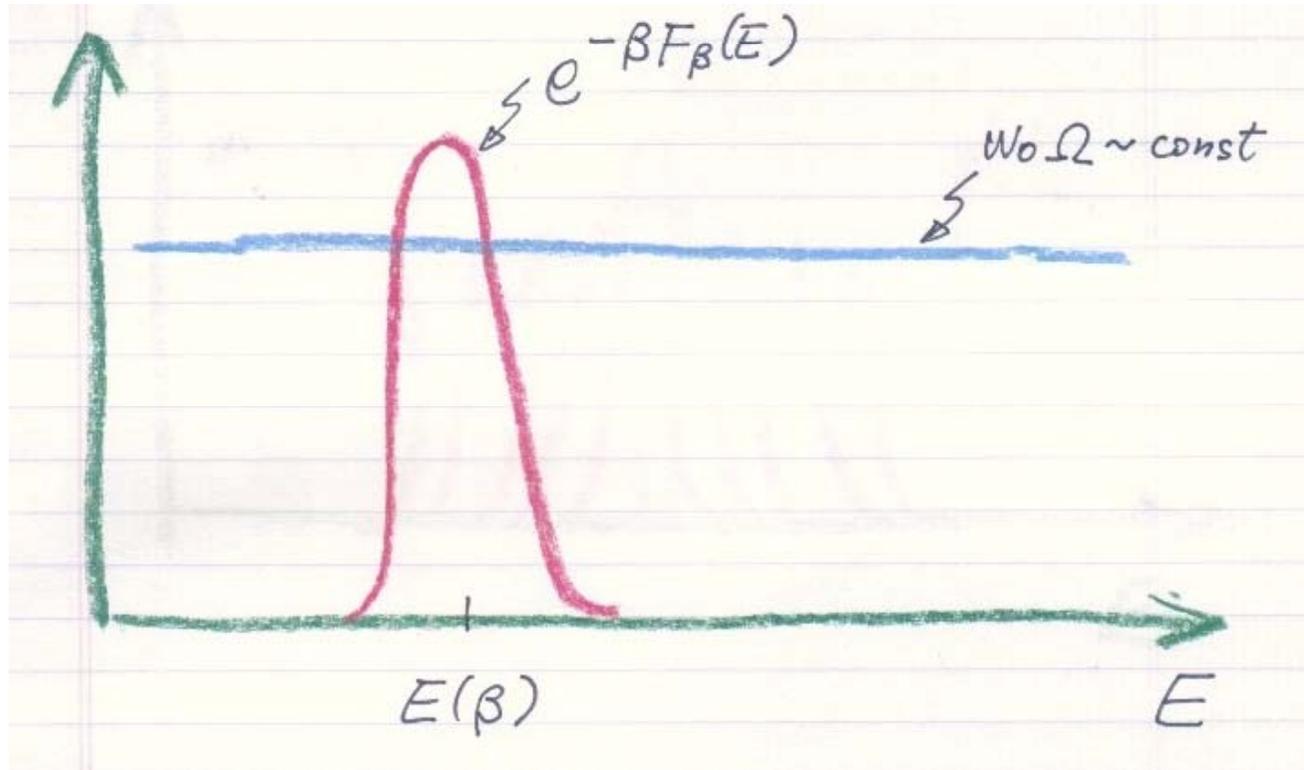
拡張モンテカルロ法といっても、やることは普通のモンテカルロシミュレーションとまったく同じ。データ処理の仕方だけが違う。簡単で便利。

再重み付け法の問題点



$$\beta F_\beta(E) = \beta_0 F_{\beta_0}(E) + (\beta - \beta_0)E$$

マルチカノニカル法

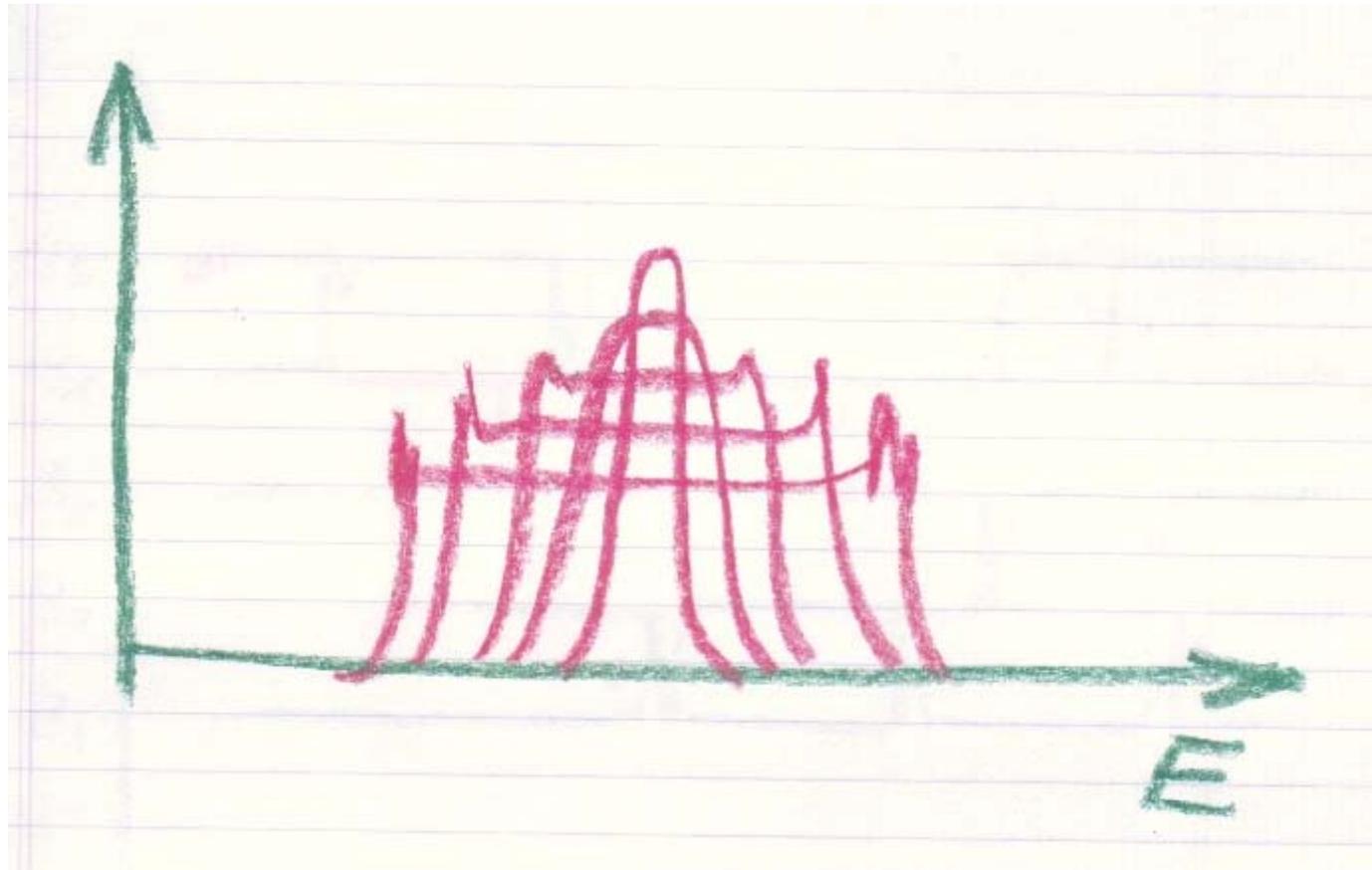


$$W_0(E) = \frac{1}{\Omega(E)}$$

$$W_0^{(k+1)}(\mathbf{A}) = \frac{W_0^{(k)}(\mathbf{A})}{H(\mathbf{A}) + 1}$$

マルチカノニカル法の問題点

なかなか分布の幅が広がらない。



Wang-Landau 法

「強制的」にひろがらせる.

スイープごとに: $W_0^{(k)}(\mathbf{A}) \leftarrow e^{-\eta^{(k)}} W_0^{(k)}(\mathbf{A})$

フェーズごとに: $\eta^{(k+1)} = \eta^{(k)} / 2$

拡張アンサンブル法での期待値

ブロードヒストグラム法, 遷移行列モンテカルロ法, フラットヒストグラム法, etc

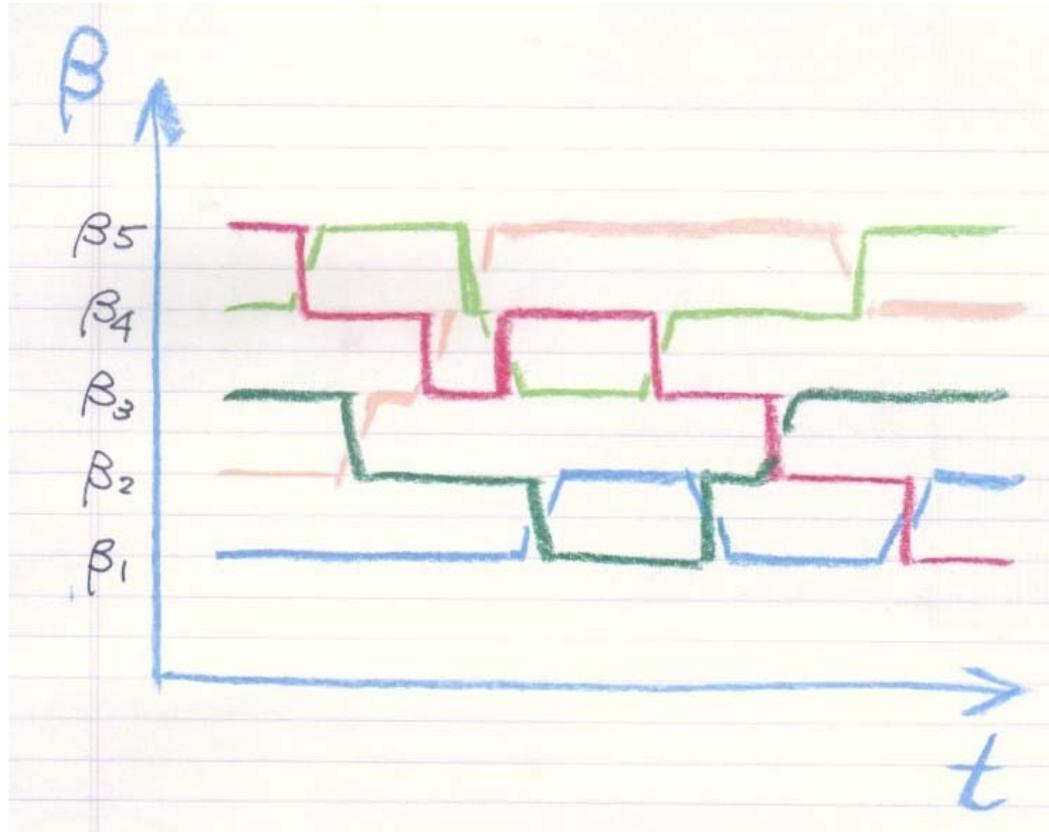
$$\langle Q \rangle = \frac{\sum_E \Omega(E) W(E) Q(E)}{\sum_E \Omega(E) W(E)}$$

$$\tilde{\Omega}(E) = \frac{\Omega(E)}{\Omega(E_0)} = \left(\prod_{k=0}^{K-1} \frac{T(E_{k+1}|E_k)}{T(E_k|E_{k+1})} \right) \times \frac{W(E)}{W(E_0)}$$

シングルスピン更新のイジングモデルの場合:

$$\langle M(E') \rangle_E \Omega(E) = \langle M(E) \rangle_{E'} \Omega(E')$$

レプリカ交換法

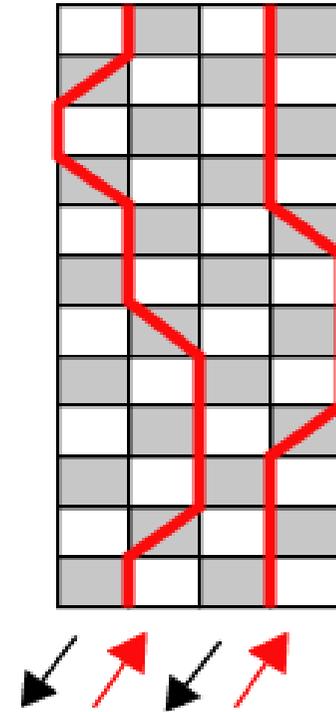


$$P_{swap} = \min\left(1, \frac{e^{-\beta E'} e^{-\beta' E}}{e^{-\beta E} e^{-\beta' E'}}\right) = \min\left(1, e^{(\beta' - \beta)(E' - E)}\right)$$

経路積分に基づく量子モンテカルロ

Suzuki 1976

$$\begin{aligned} Z &= \int DS e^{-\int_0^\beta d\tau L(S, \dot{S})} \\ &\approx \int DS e^{-\frac{\beta}{M} \sum_{k=1}^M L(S_k, \dot{S}_k)} \\ &\approx \sum_S \prod_{k=1}^M w(S_{k+1}, S_k) \\ &= \sum_S W(S) \end{aligned}$$



S : 世界線のパターン

経路積分表示

$$Z = \sum_{\psi} \left\langle \psi \left| \lim_{L \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^L \left(1 - \frac{\beta}{L} \mathcal{H} \right) \right| \psi \right\rangle$$

$$\mathcal{H} = \sum_{b=1}^M \mathcal{H}_b.$$

$$Z = \sum_{\psi} \left\langle \psi \left| \lim_{L \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^L \prod_{b=1}^M \left(1 - \frac{\beta}{L} \mathcal{H}_b \right) \right| \psi \right\rangle$$

具体的にどのような分割を考えているかはあとで

$$Z = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{\{\psi_b(k)\}} \prod_{k=1}^L \prod_{b=1}^M \langle \psi_{b+1}(k) | (1 - (\Delta\tau) \mathcal{H}_b) | \psi_b(k) \rangle$$

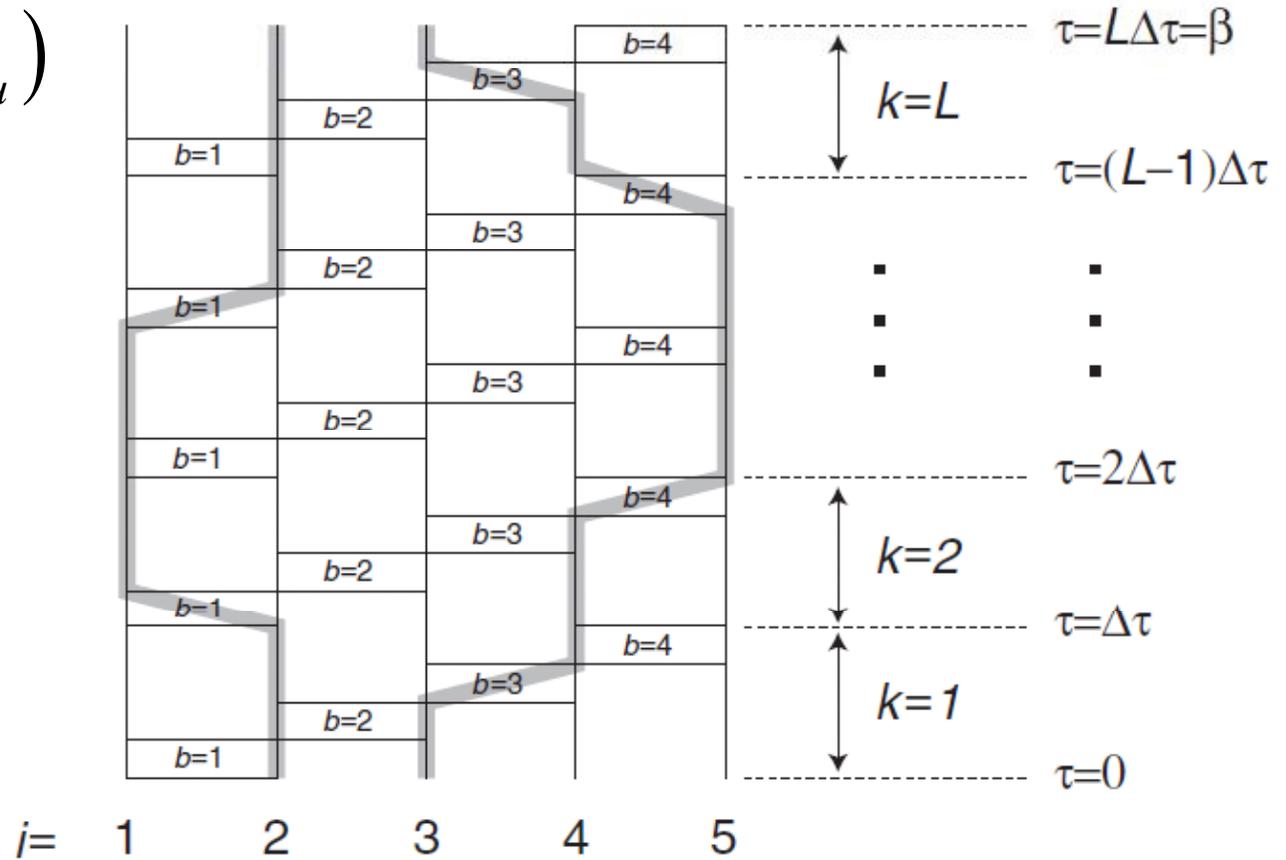
$$Z = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_S W_L(S)$$

$$W_L(S) \equiv \prod_u w(S_u), \quad u \equiv (k, b)$$

$$w(S_u) \equiv \langle \psi'_u | (1 - (\Delta\tau) \mathcal{H}_u) | \psi_u \rangle$$

経路積分表示

$$Z = \sum_{\Sigma} \prod_u w_u(\Sigma_u)$$



$$w_u(\Sigma_u) = \langle \psi_{b+1}(k) | (1 - \Delta\tau H_b) | \psi_b(k) \rangle \quad (u \equiv (k, b))$$

Fortuin-Kasteleyn 表現の一般化

$$\begin{aligned}w_u(\Sigma_u) &= \langle \psi'_u | (1 - \Delta\tau H_u) | \psi_u \rangle \\ &= \sum_{\Gamma_u=0,1} \langle \psi'_u | (-\Delta\tau H_u)^{\Gamma_u} | \psi_u \rangle \\ &= \sum_{\Gamma_u=0,1} w_u(\Sigma_u, \Gamma_u)\end{aligned}$$

$$Z = \sum_{\Sigma, \Gamma} W(\Sigma, \Gamma)$$

$$W(\Sigma, \Gamma) \equiv \prod_u w_u(\Sigma_u, \Gamma_u)$$

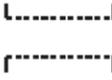
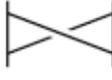
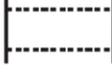
S = 1 / 2 XXZモデル

$$-H = -\sum_{(ij)} H_{ij} = \sum_{ij} \sum_{\mu} a_{\mu} \hat{\Delta}_{ij}^{\mu} = \sum_b a_b \hat{\Delta}_b \quad (b \equiv (ij, g))$$

ハミルトニアンによる分割:

$$-\mathcal{H}_{ij} = \begin{cases} \frac{J_x}{2} \hat{\Delta}_{ij}(g_C) + \frac{J_z - J_x}{2} \hat{\Delta}_{ij}(g_{CB}) \\ \frac{J_x + J_z}{4} \hat{\Delta}_{ij}(g_C) + \frac{J_x - J_z}{4} \hat{\Delta}_{ij}(g_H) \\ \frac{J_x}{2} \hat{\Delta}_{ij}(g_H) + \frac{-J_z - J_x}{2} \hat{\Delta}_{ij}(g_{HB}) \end{cases}$$

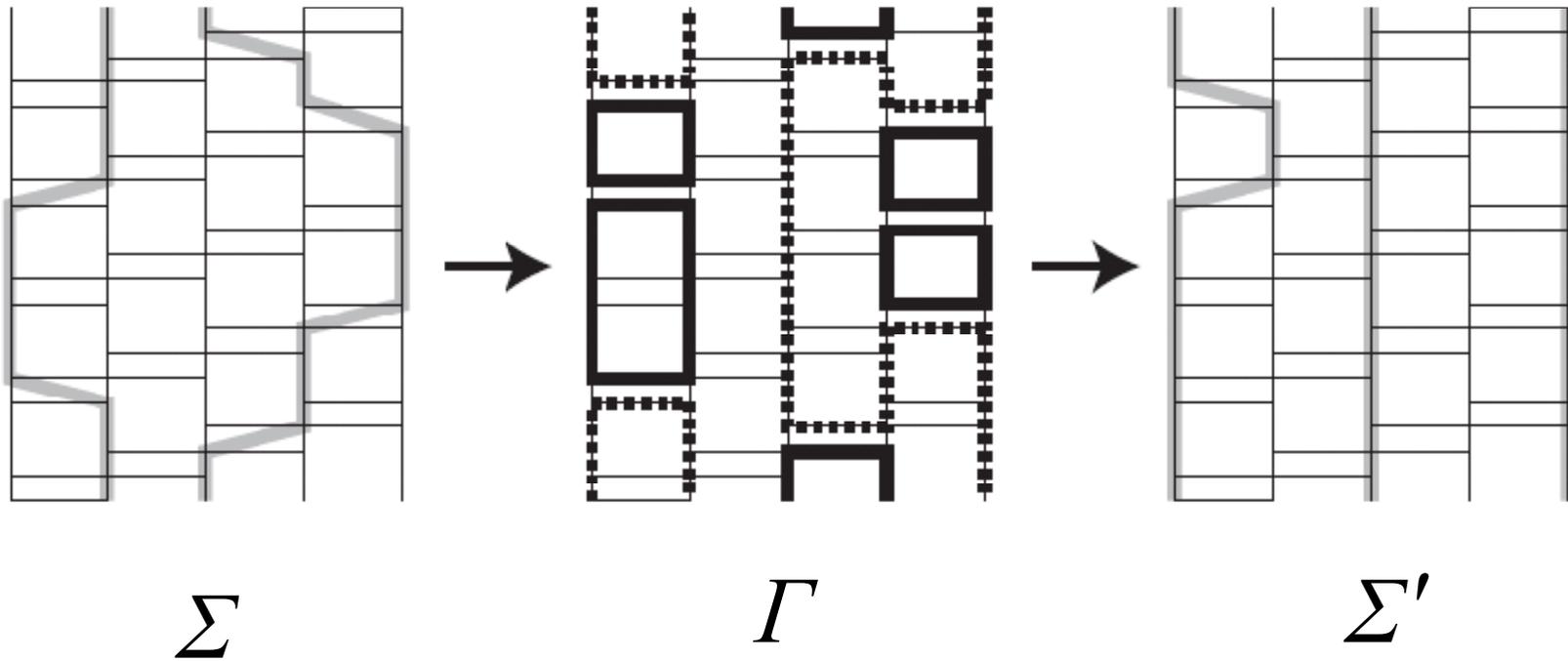
グラフの種類 (S=1/2 XXZ モデル)

Symbol	Graph	$\langle \sigma'_i \sigma'_j \hat{\Delta}_{ij}(g) \sigma_i \sigma_j \rangle$
g_I		$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
g_C		$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
g_H		$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
g_{CB}		$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
g_{HB}		$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ループアルゴリズム

$$-H_{ij} = \sum_{\mu} a_{\mu} \hat{\Delta}_{ij}^{\mu} \quad \text{と分割される場合,}$$

ある「箱」にタイプ μ のグラフを置く確率は $a_{\mu} \Delta\tau$



連続時間極限

$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0}$ 「区間幅 $\Delta\tau$ の『箱』にそれぞれ確率 $\Delta\tau \times A$ でグラフを置く」

＝「密度 A で一様ランダムにグラフをおく」

級数展開から始める定式化

$$Z = \lim_{L \rightarrow \infty} Z_L \quad Z_L \equiv \sum_{n=0}^L \frac{\beta^n}{n!} \text{Tr}(-\mathcal{H})^n.$$

$$\begin{aligned} Z_L &= \sum_{\{\gamma_k\}} \beta^{(\sum_k \gamma_k)} \frac{(L-n)!}{L!} \text{Tr} \prod_{k=1}^L (-\mathcal{H})^{\gamma_k} \\ &= \sum_G \beta^{n(G)} \frac{(L-n(G))!}{L!} \text{Tr} \prod_u (-\mathcal{H}_u)^{G_u} \\ &= \sum_G \beta^{n(G)} \frac{(L-n(G))!}{L!} \prod_u \langle \psi'_u | (-\mathcal{H}_u)^{G_u} | \psi_u \rangle \end{aligned}$$

$$Z_L = \sum_{\Sigma, \Gamma} \prod_u \langle \psi'_u | (-\Delta \tau H)^{\Gamma_u} | \psi_u \rangle$$

結局、経路積分から始めたときと同じ式が導かれた

物理量の測定

■ エネルギー

$$\langle H \rangle = \langle E(S) \rangle_{MC}$$

$$E(S) \equiv \beta^{-1} \left(\int_0^\beta d\tau \langle \psi(\tau) | H | \psi(\tau) \rangle - N_{kink}(S) \right)$$

■ 比熱

$$C = \beta^2 \left(\langle E(S)^2 \rangle_{MC} - \langle E(S) \rangle_{MC}^2 - T^2 N_{kink}(S) \right)$$

■ 相関関数

$$\Gamma(X', X) \equiv \Im \langle \hat{S}_j^z(\tau') \hat{S}_i^z(\tau) \rangle = \langle S_{X'} S_X \rangle_{MC}$$

$$X \equiv (i, \tau), \quad X' \equiv (j, \tau'), \quad S_X \equiv \psi_i(\tau)$$

■ 帯磁率

$$\chi = \frac{\beta}{N} \left(\langle M(S)^2 \rangle_{MC} - \langle M(S) \rangle_{MC}^2 \right)$$

$$M(S) \equiv \frac{1}{\beta} \int dX S_X$$

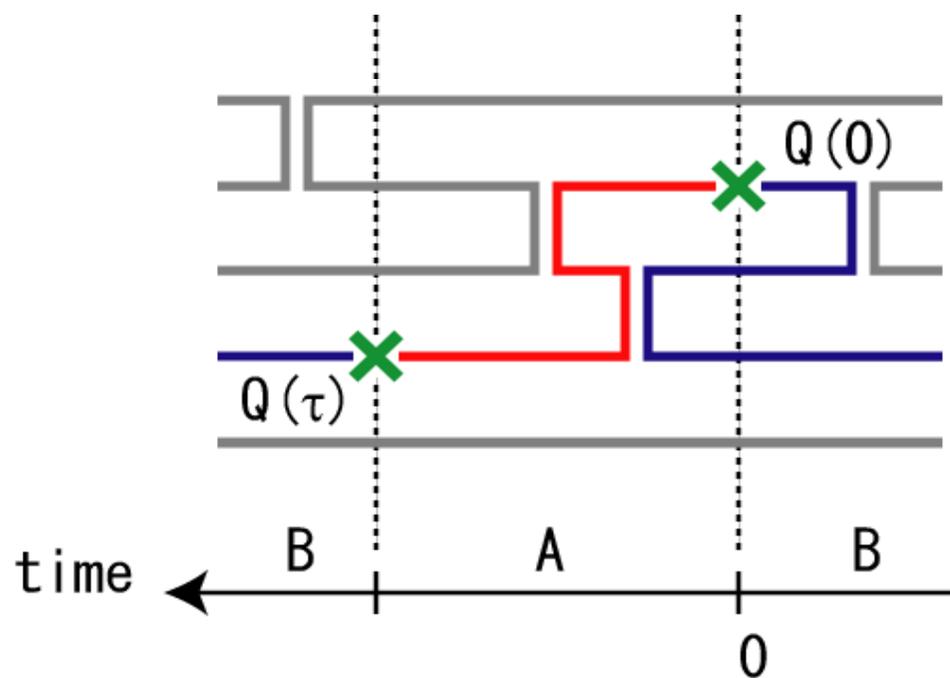
非対角グリーン関数

Brower, Chandrasekharan and Wiese 1998

$$\begin{aligned} & \text{Tr}(e^{-\beta H} Q'(\tau) Q(0)) \\ &= \sum_S \sum_G V(G) \Delta(S_B, G_B) Q'(S_B, S_A) \Delta(S_A, G_A) Q(S_A, S_B) \\ &= \sum_G V(G) \chi_{Q'Q}(G) \end{aligned}$$



$$\langle Q'(\tau) Q(0) \rangle = \langle \chi_{Q'Q} \rangle_g$$



グラフで定義される測定量

■ エネルギー

$$\langle H \rangle = -\beta^{-1} \langle N_{nt}(G) \rangle_{MC}$$

$$N_{nt}(G) = (\text{total number of non-trivial graphs})$$

■ 比熱

$$C = N^{-1} \left(\langle N_{nt}(G)^2 \rangle_{MC} - \langle N_{nt}(G) \rangle_{MC}^2 \right)$$

■ 対角相関

$$\Gamma_{zz}(X', X) \equiv \mathfrak{I} \langle \hat{S}_j^z(\tau') \hat{S}_i^z(\tau) \rangle = \langle \gamma_{X', X}(G) \rangle_{MC}$$

$$\gamma_{X', X}(G) = \begin{cases} \pm 1/4 & (X \text{ と } X' \text{ が同じクラスタ上}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

■ 非対角相関

$$\Gamma_{xx}(X', X) \equiv \mathfrak{I} \langle \hat{S}_j^x(\tau') \hat{S}_i^x(\tau) \rangle = \langle \eta_{X', X}(G) \rangle_{MC}$$

$$\eta_{X', X}(G) = \begin{cases} 1/4 & (X \text{ と } X' \text{ が同じクラスタ上}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

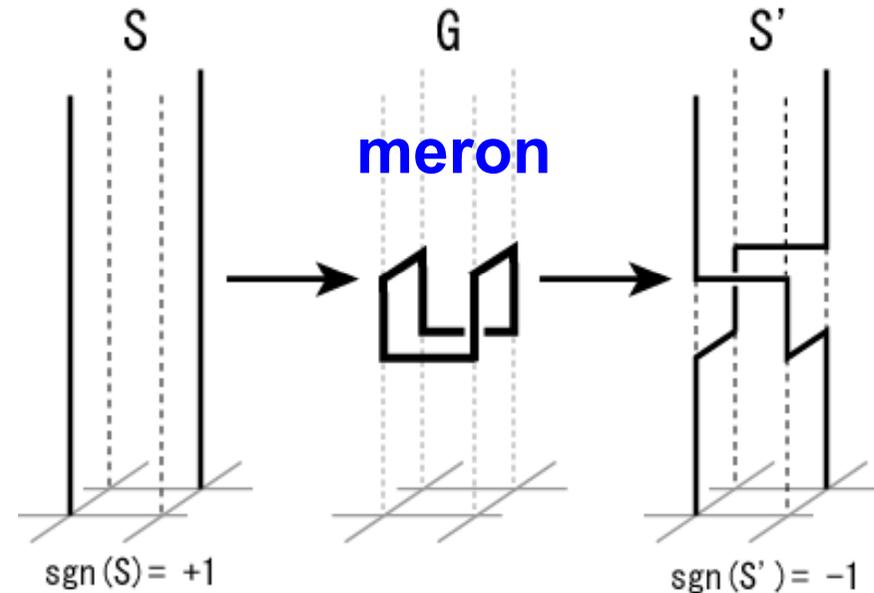
負符号問題

負符号のである場合：(1) フェルミオン系, (2) フラストレーション

meron アルゴリズム

Chandrasekharan and Wiese 1999

$$\begin{aligned} Z &= \sum_S [\text{sgn}(S) \times W(S)] \\ &= \sum_S \sum_G [V(G) \times \text{sgn}(S) \Delta(S, G)] \\ &= \sum_G V(G) \left[\sum_{\{\sigma_l\}} \prod_l \varepsilon_l^{\sigma_l} \right] \\ &= \sum_{G: \text{meron-free}} V(G) 2^{N_c(G)} \end{aligned}$$



メロンを含まないグラフの空間に制限してサンプリングすればよい。

Merlon アルゴリズムがうまくいく条件:

- 1) 符号がループ符号 ($\varepsilon_l = \pm 1$) の積に因子化できる. ($0 < U < 2t$ ではダメ)
- 2) メロンの含まれたグラフは分配関数に寄与しない. (half-filling でないとダメ)
- 3) メロンを含まないグラフは分配関数に正の寄与をする.

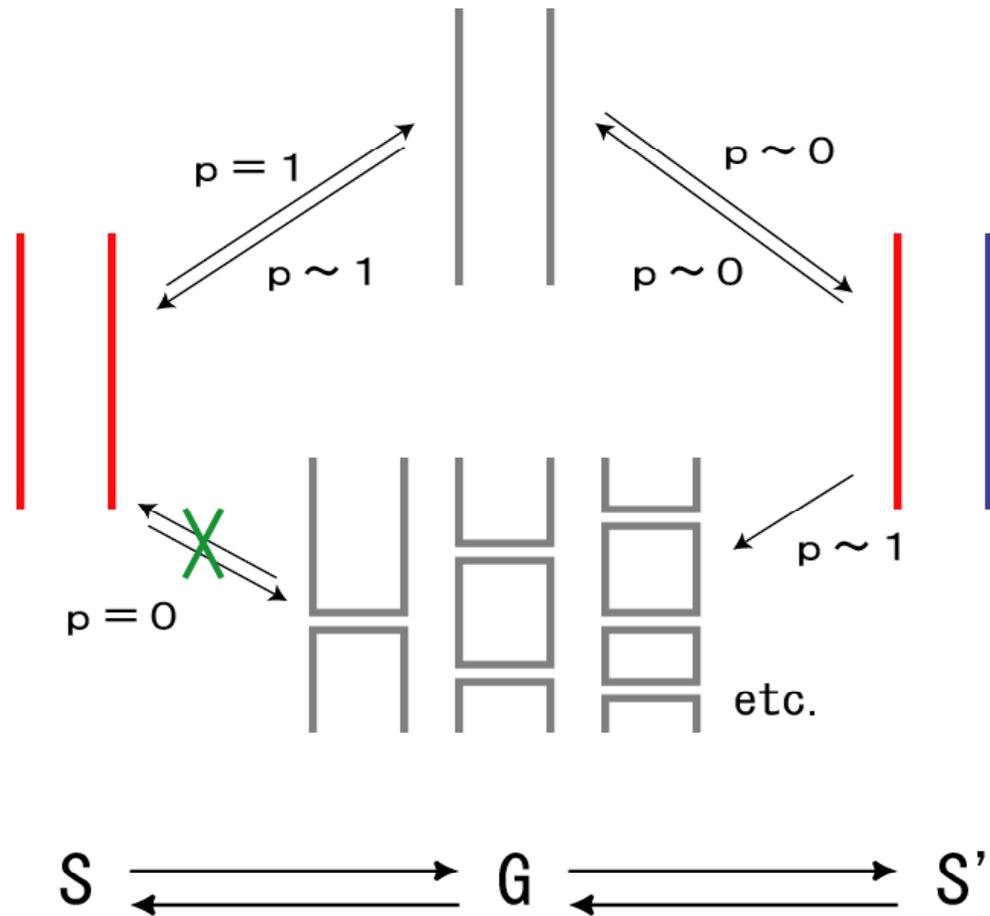
スピンレスで(弱い)斥力相互作用をもつフェルミ粒子系はOK

ループアルゴリズムの問題点

— 交換相互作用と競合する磁場 —

状態空間内に
「狭い道」が
できてしまう

グラフをわりあてる
ときには磁場の効
果を考慮しないの
が問題



ワームアルゴリズムのあらまし

ワームアルゴリズムは世界線が2箇所不連続になることを許すことによって状態空間を拡大し、不連続点の移動によって、拡大された状態空間内のマルコフ過程を構成する方法である。

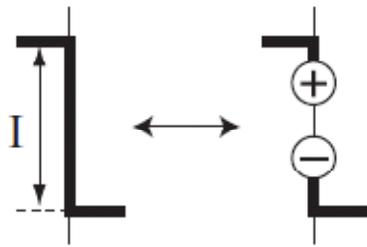
ワームアルゴリズムはもとのハミルトニアンに適切なソース項を入れたものをハミルトニアンをし、ソース項について2次の項までに限定した空間での詳細釣り合い条件から導くことができる。

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} - \eta Q$$

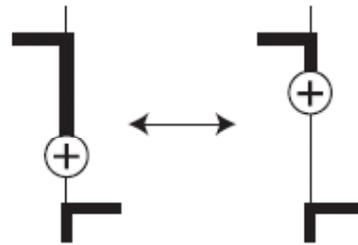
$$Z = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_S \tilde{W}_L(S)$$

$$\tilde{W}_L(S) = W_D \times (\Delta\tau)^{N_{\text{kink}}} W_K \times (\Delta\tau)^{N_{\text{dc}}} W_W$$

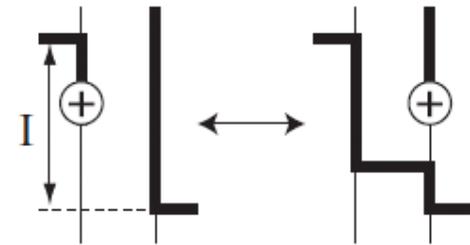
ワームアルゴリズムの基本手続き



ワームの生成・消滅



ヘッドの垂直移動



ヘッドの水平移動

向きつきループアルゴリズム (DLA)

ワームアルゴリズムとの共通点

... 不連続点を2つ導入してヘッドの移動によって状態更新を行う

ループアルゴリズムとの共通点

... グラフ要素(バーテックス)はヘッドの移動中は固定

DLA

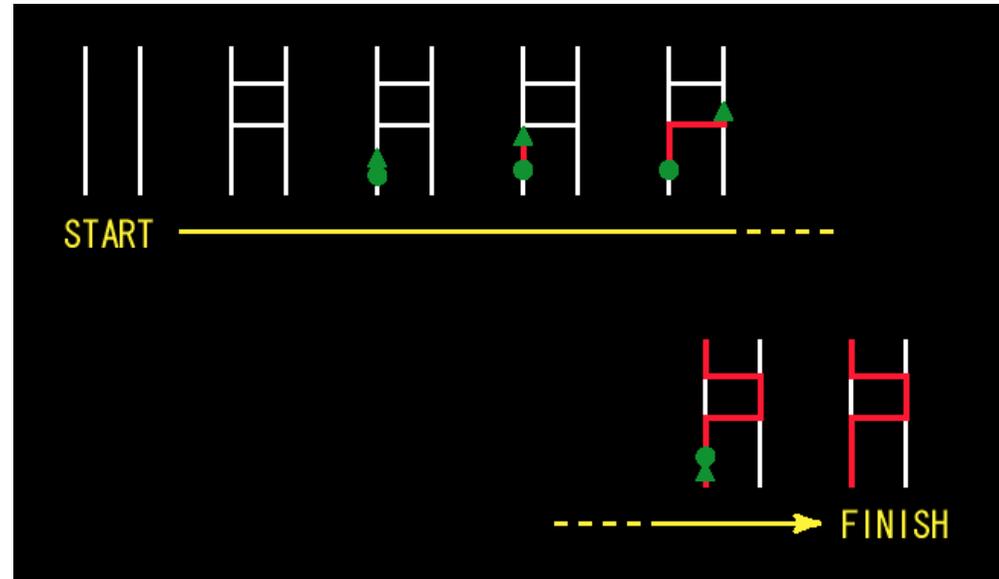
Syljuasen-Sandvik 2002

バーテックス密度:

$$\rho_{lm} = W(\Sigma)$$

ワーム散乱確率:

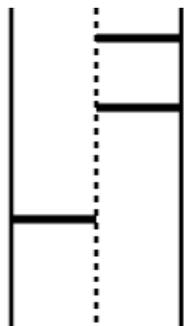
$$P(\Sigma' | \Sigma)$$



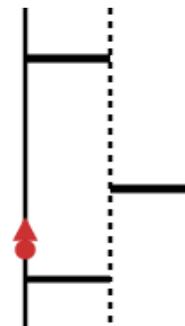
$$\Sigma = \begin{pmatrix} l' & m' \\ l^\sigma & m \end{pmatrix} = \begin{array}{c|c} l' & m' \\ \hline l^\sigma & m \end{array}$$

DLA

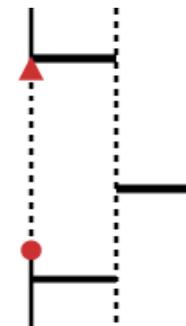
1. 初期状態。縦実線は上向きスピン状態の場所、点線は下向きスピン。横線はアクティブパーテックス（以下単にパーテックス）



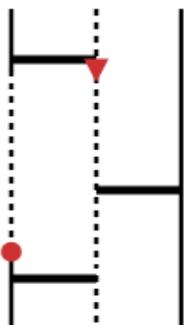
2. パーテックスの更新およびワーム対の発生



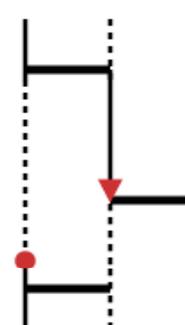
3. ワームを進行方向に次のパーテックスまで移動。（ワームが通過した部分はスピン状態が変わる。）



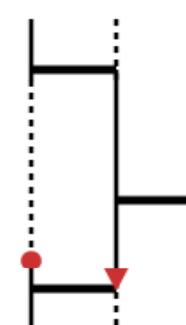
4. ワームのパーテックスにおける散乱。散乱方向はサイコロで（確率的に）きまる。



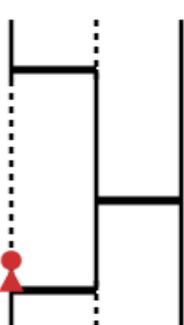
5. 再びパーテックスにあたるまで移動



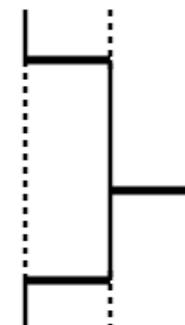
6. 今回は直進して更に次のパーテックスまで移動



7. パーテックスにおける散乱



8. 対消滅



DLA

Weight: $W \begin{pmatrix} l' & m' \\ l^\varepsilon & m \end{pmatrix} \equiv \langle l', m' | (\text{const}) - H | l, m \rangle$

$\varepsilon = \pm 1, \pm 2, \dots =$ [the magnitude of spin change caused by the worm]

Extended Weight : $W(\Sigma', \Sigma)$

Weight Equation : $W(\Sigma) = \sum_{\Sigma'} W(\Sigma', \Sigma)$

Detailed Balance : $W(\Sigma', \Sigma) = W(\bar{\Sigma}, \bar{\Sigma}')$

Σ' : the final state of scattering

$\bar{\Sigma}$: inverse of Σ

$\bar{\Sigma}'$: inverse of Σ'

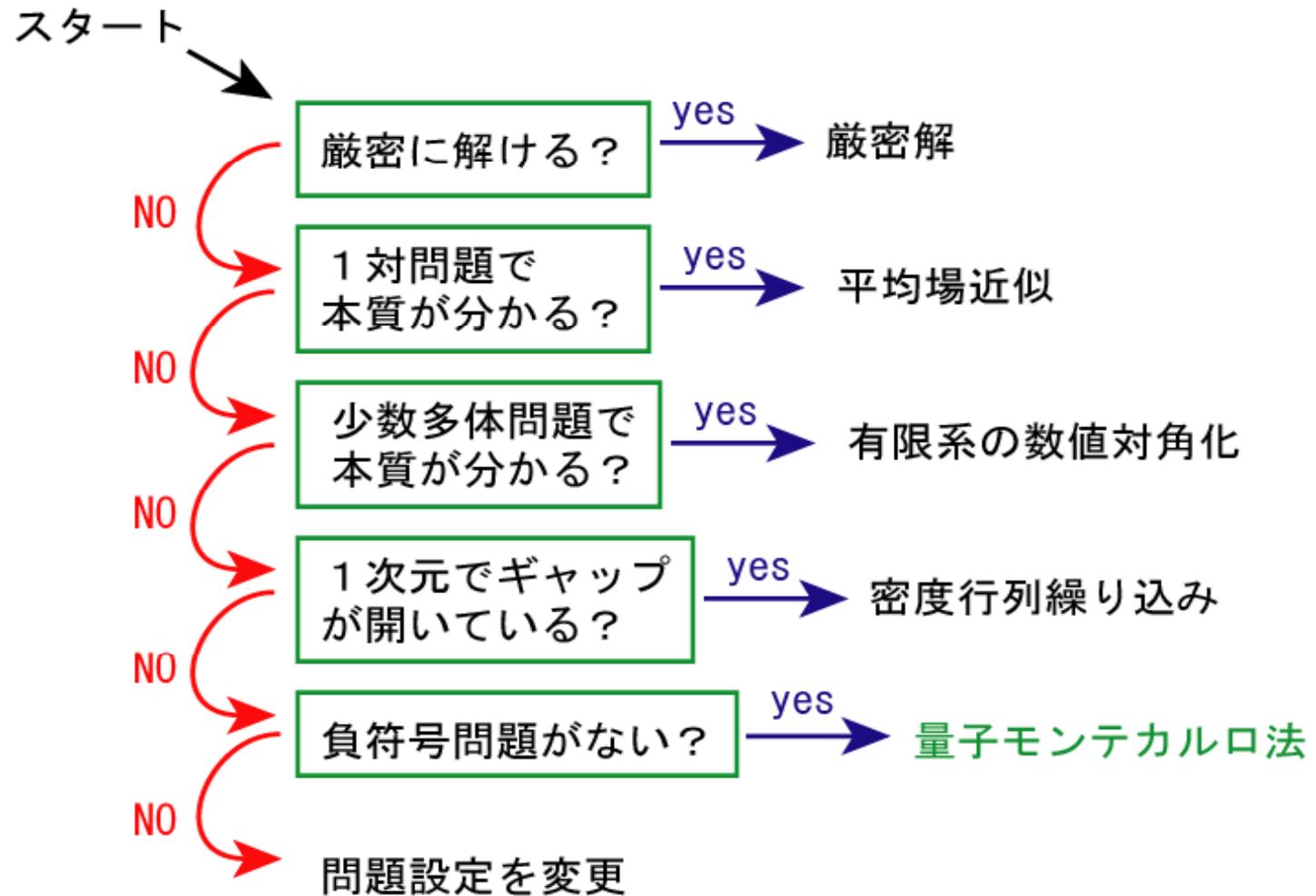
Vertex Density : $\rho_{lm} = W \begin{pmatrix} l & m \\ l & m \end{pmatrix}$

Scattering Prob. : $P(\Sigma' | \Sigma) = \frac{W(\Sigma, \Sigma')}{W(\Sigma)}$

Solution is not unique

最後に

量子モンテカルロ法はどのようなときに使うべきか？



未解決の問題

まだできていないこと:

- 結晶場異方性の存在する場合
- イジング的XXZモデルの場合もカバーする一般化
- 負符号問題の解決(そもそも一般解はあるのか?)